

ΘΕΜΑ 2^ο (4 μονάδες)

[Προγραμματισμός έργου] Για την ολοκλήρωση ενός έργου πρέπει να εκτελεστούν 6 εργασίες, τα στοιχεία των οποίων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Εργασία	A	B	Γ	Δ	E	Z
Διάρκεια	4	2	4	2	3	4
Πόροι:	R ₁	R ₁	R ₂	R ₃	R ₁ , R ₂	R ₂ , R ₃

Ειδικότερα, κάθε εργασία έχει συγκεκριμένη διάρκεια, ενώ για να εκτελεστεί δεσμεύει μία μονάδα από κάθε πόρο που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα (μερικές εργασίες χρειάζονται από μία μονάδα από δύο πόρους). Μετά την ολοκλήρωση της εργασίας οι πόροι αποδεσμεύονται (φανταστείτε τους πόρους ως εργαλεία που χρειαζόμαστε για την ολοκλήρωση μιας εργασίας και τα οποία στη συνέχεια αποδεσμεύονται, ενώ μερικές εργασίες χρειάζονται δύο διαφορετικά εργαλεία). Διαθέτουμε μία μονάδα από κάθε έναν από τους πόρους.

Επιπλέον, λόγω των εξαρτήσεων διαφόρων επιμέρους εργασιών μεταξύ τους, κάποιες εργασίες είναι προαπαιτούμενες άλλων για την εκτέλεσή τους. Ειδικότερα:

- Η Γ μπορεί να αρχίσει να εκτελείται μόνο μετά την ολοκλήρωση της Α (π.χ. εάν η Α ξεκινήσει να εκτελείται σε $t=0$, η Γ μπορεί να ξεκινήσει να εκτελείται το νωρίτερο σε $t=4$).
- Η Δ μπορεί να αρχίσει να εκτελείται μόνο μετά την ολοκλήρωση της Β.
- Η Ε μπορεί να αρχίσει να εκτελείται μόνο μετά την ολοκλήρωση της Δ.

Θέλουμε το έργο να έχει ολοκληρωθεί σε 11 μονάδες χρόνου, δηλαδή σε $t=11$ να έχει ολοκληρωθεί η εκτέλεση όλων των εργασιών. Κάθε εργασία μπορεί να αρχίσει να εκτελείται μόνο σε ακέραιες τιμές χρόνου (ξεκινώντας από $t=0$).

α) Μοντελοποιήστε το πρόβλημα ως πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών, δηλαδή ορίστε τις μεταβλητές, τα πεδία τους και τους περιορισμούς (περιοριστείτε μόνο σε μοναδιαίους και δυαδικούς περιορισμούς, δηλαδή περιορισμούς που αφορούν ζεύγη μεταβλητών). **(1,5)**

β) Λύστε το πρόβλημα, δηλαδή τοποθετείστε τις εργασίες στο χρόνο έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί διάταξης και πόρων. Για την επίλυση χρησιμοποιήστε έλεγχο συνέπειας τόξου.

(2,5)

Υπόδειξη 1: Έστω δύο εργασίες με χρόνους έναρξης X και Y και διάρκειες d_X και d_Y . Για να δηλώσουμε ότι οι εργασίες δεν επικαλύπτονται γράφουμε:

$$X + d_X \leq Y \text{ or } Y + d_Y \leq X$$

Ένας διαζευκτικός περιορισμός σαν τον παραπάνω ενεργοποιείται μόνο όταν η μία από τις δύο διαζεύξεις μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν ισχύει, οπότε εφαρμόζεται η άλλη.

Υπόδειξη 2: Για να δηλώσουμε ότι η Y πρέπει να περιμένει την ολοκλήρωση της X για να ξεκινήσει την εκτέλεσή της, γράφουμε τον περιορισμό $X + d_X \leq Y$.

Απάντηση:

α) Ορίζουμε 6 μεταβλητές με ονόματα A, B, Γ, Δ, E και Z . Το αρχικό πεδίο των μεταβλητών είναι το $\{0, 1, 2, \dots, 11\}$ για όλες τις μεταβλητές.

Με δεδομένο ότι όλες οι εργασίες πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί σε $t=11$, και με δοσμένες τις διάρκειές τους, προκύπτουν οι παρακάτω μοναδιαίοι περιορισμοί:

$$A + 4 \leq 11 \quad (1)$$

$$B + 2 \leq 11 \quad (2)$$

$$C + 4 \leq 11 \quad (3)$$

$$D + 2 \leq 11 \quad (4)$$

$$E + 3 \leq 11 \quad (5)$$

$$Z + 4 \leq 11 \quad (6)$$

Με δεδομένο επίσης ότι κάποιες εργασίες χρησιμοποιούν κοινούς πόρους, ενώ έχουμε μονάχα μια μονάδα από κάθε πόρο, προκύπτουν οι παρακάτω δυαδικοί περιορισμοί:

Από τον πόρο R_1 :

$$A + 4 \leq B \text{ or } B + 2 \leq A \quad (7)$$

$$A + 4 \leq E \text{ or } E + 3 \leq A \quad (8)$$

$$B + 2 \leq E \text{ or } E + 3 \leq B \quad (9)$$

Από τον πόρο R_2 :

$$\Gamma + 4 \leq E \text{ or } E + 3 \leq \Gamma \quad (10)$$

$$\Gamma + 4 \leq Z \text{ or } Z + 4 \leq \Gamma \quad (11)$$

$$E + 3 \leq Z \text{ or } Z + 4 \leq E \quad (12)$$

Από τον πόρο R_3 :

$$\Delta + 2 \leq Z \text{ or } Z + 4 \leq \Delta \quad (13)$$

Τέλος οι δοσμένοι περιορισμοί διάταξης είναι οι εξής:

$$A + 4 \leq \Gamma \quad (14)$$

$$B + 2 \leq \Delta \quad (15)$$

$$\Delta + 2 \leq E \quad (16)$$

β) Οι περιορισμοί (1) έως (6) εφαρμόζονται μία φορά μόνο και μειώνουν τα πεδία των μεταβλητών ως εξής:

$$D_A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$D_\gamma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$D_\delta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$D_\epsilon = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D_\zeta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Στη συνέχεια θα εκμεταλλευτούμε τους δυαδικούς περιορισμούς ως εξής:

Από τον (14) προκύπτει ότι:

$$D_A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$D_\Gamma = \{4, 5, 6, 7\}$$

Από τον (15) προκύπτει:

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$D_\Delta = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Από τον (16) προκύπτει:

$$D_\Delta = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$D_E = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

Ξανακοιτώντας τον (15) έχουμε:

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$D_\Delta = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Τα νέα πεδία των μεταβλητών είναι λοιπόν:

$$D_A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$D_\Gamma = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$D_\Delta = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$D_E = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D_\zeta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Οι περιορισμοί (7) έως (13) είναι πιο δύσκολοι στο χειρισμό τους. Σύμφωνα με την υπόδειξη μπορούμε να ενεργοποιήσουμε έναν τέτοιο περιορισμό μόνο όταν το ένα σκέλος της διάζευξης δεν μπορεί να ισχύει σε καμία περίπτωση, οπότε ενεργοποιείται το άλλο.

Για παράδειγμα, η πρώτη διάζευξη του περιορισμού (11), δηλαδή $\Gamma + 4 \leq Z$, δεν μπορεί να ισχύει με τα τρέχοντα πεδία, άρα ισχύει η δεύτερη, $Z + 4 \leq \Gamma$, η οποία οδηγεί στα:

$$D_A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$D_\Gamma = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$D_\Delta = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$D_E = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D_\zeta = \{0, 1, 2, 3\}$$

Η πρώτη διάζευξη του περιορισμού (13), δηλαδή $\Delta + 2 \leq Z$, δεν μπορεί να ισχύει με τα τρέχοντα πεδία, άρα ισχύει η δεύτερη, $Z + 4 \leq \Delta$, η οποία οδηγεί στα:

$$D_A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$D_\Gamma = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$D_\Delta = \{4, 5, 6\}$$

$$D_E = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D_\zeta = \{0, 1, 2\}$$

Τώρα που άλλαξε το πεδίο της Δ μπορούμε να επανελέγξουμε τους περιορισμούς (15) και (16), όπου ο (16) μας δίνει:

$$D_A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$D_\Gamma = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$D_\Delta = \{4, 5, 6\}$$

$$D_E = \{6, 7, 8\}$$

$$D_\zeta = \{0, 1, 2\}$$

Η δεύτερη διάζευξη του περιορισμού (10), δηλαδή $E + 3 \leq \Gamma$, δεν μπορεί να ισχύει με τα τρέχοντα πεδία, άρα ισχύει η δεύτερη, $\Gamma + 4 \leq E$, η οποία οδηγεί στα:

$$D_A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$D_B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$D_\Gamma = \{4\}$$

$$D_{\Delta}=\{4,5,6\}$$

$$D_E=\{8\}$$

$$D_{\zeta}=\{0,1,2\}$$

Από την (11) τώρα, το πρώτο σκέλος της οποίας $\Gamma+4\leq Z$ είδαμε ότι δεν μπορεί να ισχύει, προκύπτει ότι $Z+4\leq\Gamma$ οπότε:

$$D_A=\{0,1,2,3\}$$

$$D_B=\{0,1,2,3,4\}$$

$$D_{\Gamma}=\{4\}$$

$$D_{\Delta}=\{4,5,6\}$$

$$D_E=\{8\}$$

$$D_{\zeta}=\{0\}$$

Από την (14) προκύπτει ότι:

$$D_A=\{0\}$$

$$D_B=\{0,1,2,3,4\}$$

$$D_{\Gamma}=\{4\}$$

$$D_{\Delta}=\{4,5,6\}$$

$$D_E=\{8\}$$

$$D_{\zeta}=\{0\}$$

Η δεύτερη διάζευξη του περιορισμού (7), δηλαδή $B+2\leq A$, δεν μπορεί να ισχύει με τα τρέχοντα πεδία, άρα ισχύει η δεύτερη, $A+4\leq B$, η οποία οδηγεί στα:

$$D_A=\{0\}$$

$$D_B=\{4\}$$

$$D_{\Gamma}=\{4\}$$

$$D_{\Delta}=\{4,5,6\}$$

$$D_E=\{8\}$$

$$D_{\zeta}=\{0\}$$

Τέλος από την (15) προκύπτει ότι:

$$D_A=\{0\}$$

$$D_B=\{4\}$$

$$D_{\Gamma}=\{4\}$$

$$D_{\Delta}=\{6\}$$

$$D_E=\{8\}$$

$$D_{\zeta}=\{0\}$$

Στο σημείο αυτό έχουμε βρει μια τιμή για κάθε μεταβλητή. Ελέγχουμε ξανά όλους τους περιορισμούς για να διαπιστώσουμε αν ικανοποιούνται, κάτι που συμβαίνει. Άρα η παραπάνω ανάθεση τιμών αποτελεί λύση του προβλήματός μας. Μάλιστα η λύση αυτή είναι και μοναδική, μιας και βρέθηκε χωρίς τυχαία ανάθεση τιμής σε μεταβλητή παρά μόνο με συμπερασμό.